

3. Rozklad mnohočlenů

ROZKLAD MNOHOČLENŮ - najdění ne znau součinu několika mnohočlenů, kdežto jsou uvedeny dle rozložitelní

- rozdíl kubů
- vzorce

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$a^3 + 3ab + b^3 = (a+b)^3$$

$$a^3 - 3ab + b^3 = (a-b)^3$$

$$\left[\begin{array}{l} ? a^3 + b^3 \text{ nelze v R} \\ \text{rozložit} \end{array} \right]$$

NOVĚ

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$\left[\begin{array}{l} a^3 + 3ab + b^3 = (a+b)^3 \\ a^3 - 3ab + b^3 = (a-b)^3 \end{array} \right]$$

- vytýkání před závorku, postupné vytýkání
- rozklad kvadratického trojčlenu

Mílkady

① Rozložit

$$a) \frac{a^2 - x^2}{x^2 - 9} = \frac{(a-x)(a+x)}{(x-3)(x+3)}$$

$$b) 4 - x^2 = (2-x)(2+x)$$

$$c) \frac{a^2 - 2ab + b^2}{x^2 + 6x + 9} = (x+3)^2$$

$$\begin{matrix} a=x & & b=3 \\ \downarrow & \downarrow & \\ 2ab = 2 \cdot x \cdot 3 = 6x \end{matrix}$$

$$d) \frac{x^2 - 10x + 25}{x^2 - 25} = (x-5)^2$$

$$\begin{matrix} & \downarrow \\ & 2x \cdot (-5) = -10x \end{matrix}$$

$$e) x^2 + 2x + 4 \neq (x+2)^2$$

$$\begin{matrix} & \downarrow \\ & 2 \cdot x \cdot 2 = 4x \end{matrix}$$

$$f) \frac{a^3 + b^3}{x^3 + 8} = \frac{(a+b)(a^2 - ab + b^2)}{(x+2)(x^2 - 2x + 4)}$$

$$\begin{matrix} a=x & & b=2 \\ \downarrow & \downarrow & \\ & & \end{matrix}$$

$$g) x^3 + 125 = (x+5)(x^2 - 5x + 25)$$

$$h) x^3 + 1 = (x+1)(x^2 - x + 1)$$

$$i) \frac{a^3 - b^3}{x^3 - 27} = (x-3)(x^2 + 3x + 9)$$

$$j) x^3 - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1)$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{vytýkání } (-1) \quad \text{ZÁVORKY, ZNĚNA ZNAHÉNEK} \\ -x+3 = -1(x-3) = -(x-3) \\ +4x-3y+2 = -1(-4x+3y-2) = -(-4x+3y-2) \end{array} \right]$$

② rozložit snyknutím

$$a) 2xy - 6x + 4x^2 = 2x(y-3+2x) = 2x(2x+y-3)$$

$$b) a(x-y) - b^2(x-y) = (x-y)(a^2 - b^2) = (x-y)(a-b)(a+b)$$

$$c) a(x-y) + b(y-x) = a(x-y) - b(-y+x) = a(x-y) - b(x-y) =$$

$$\text{mytýkání } (-1) \Rightarrow \text{ZNĚNA ZNAHÉNEK U ČLENŮ}$$

$$= (x-y)(a-b)$$

$$d) (x+y) - (x+y)^2 = (x+y)(1 - (x+y)) = (x+y)(1-x-y)$$

$$e) \cancel{ax} - \cancel{a^2} - \cancel{b^2} + bc = a^2(x-1) - b(1-x) = a^2(x-1) + b(x-1) =$$

$$\left[\begin{array}{l} \cancel{a^2(x-1)} + b(\cancel{1-x}) = a^2(x-1) + b(x-1) = \\ \cancel{a^2(x-1)} + b(-1+x) = a^2(x-1) + b(x-1) = \end{array} \right]$$

$$= (x-1)(a^2 + b)$$

POKUD NEVÍŠ ZNAHÉNEKO, ROZNÁSOB SI
A ODEJK - MUSÍ VLETI PŘIRODNÍ VÝRAZ

$$f) x^5 - xy - 2x + 2y = x(x-y) - 2(x-y) = (x-y)(x-2)$$

$$g) x^5 + x^3 - x^2 - 1 = x^3(x^2 + 1) - 1(x^2 + 1) = (x^2 + 1)(x^3 - 1) =$$

$$= (x^2 + 1)(x-1)(x^2 + x + 1)$$

\downarrow
mílkadlo

\downarrow
mílkadlo

\downarrow
 $a^3 - b^3$

③ rozložit

$$a) x^4 - y^4 = (x^2)^2 - (y^2)^2 = \frac{(a-b)(a+b)}{a^2-b^2} = \frac{(x^2-y^2)(x^2+y^2)}{x^2-y^2} = \cancel{(x^2-y^2)} \cdot \cancel{(x^2+y^2)} = (x-y)(x+y)(x^2+y^2)$$

$$b) 2p^4 - p^2 + p - 2 = p^2(2p^2 - 1) + p - 2 \quad \text{NEVEDĚ K CJ21}$$

$$\begin{aligned} &= 2(p^4 - 1) - p(p^2 - 1) = 2\left[\frac{(p^2)^2 - 1^2}{a^2-b^2}\right] - p(p^2 - 1) = \\ &= 2(p^2 - 1)(p^2 + 1) - p(p^2 - 1) = (p^2 - 1)[2(p^2 + 1) - p] = \\ &= (p-1)(p+1)(2p^2 + 2 - p) \end{aligned}$$

$$c) x^6 - y^6 = (x^3)^2 - (y^3)^2 = \frac{(a-b)(a+b)}{a^2-b^2} = \frac{(x^3-y^3)(x^3+y^3)}{(a^3-b^3) \cdot (a^3+b^3)} =$$

$$\begin{aligned} &(x-y)(x^2+xy+y^2)(x+y)(x^2-xy+y^2) \\ &= (x-y)(x+y)(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2) \end{aligned}$$

ROZKLAD KVADRATICKEHO TROJČLENU (OBMĚNA INV. VIETOVÝCH VZOREC $\xrightarrow{\text{málo}}$)

- VYVOZENÍ: $(x+2)(x+3) = x^2 + 3x + 2x + 2 \cdot 3 = x^2 + (2+3)x + 2 \cdot 3 = x^2 + 5x + 6$

- OPACNĚ: $x^2 + 5x + 6 = (x+2)(x+3)$

- kvadratický trojčlen (monomany - koeficient u x^2 rovn 1)

$$x^2 + px + q = (x+x_1)(x+x_2) \quad \text{kde } x_1+x_2 = p \quad \boxed{x_1, x_2 \in \mathbb{Z}} \\ x_1 \cdot x_2 = q \quad \boxed{x_1, x_2 \in \mathbb{Z}}$$

[NE VŽDY LZE - může plnit, jinak hledat kořeny kv. rovn pomocí moci - viz později u kv. ROVNIC]

$$\begin{bmatrix} \text{VIETOVY VZOREC} & x_1+x_2 = -p \\ & x_1 \cdot x_2 = q \end{bmatrix}$$

Příklady

④ rozložit

$$a) x^2 + 7x + 6 = (x+1)(x+6)$$

$$x^2 + px + q$$

$$\begin{bmatrix} \text{hl. celé čísla } x_1, x_2 : x_1+x_2 = 7 & 1+6=7 \\ & x_1 \cdot x_2 = 6 \rightarrow \begin{array}{l} \text{1,6} \\ \text{-1,-6} \\ \hline \text{-7,-5} \end{array} \end{bmatrix}$$

- je-li součin rov kladný
=> x_1, x_2 kladné, nebo napojené

$$b) x^2 + 10x + 24 = (x+4)(x+6)$$

$$\begin{bmatrix} \text{hl. } x_1+x_2 = 10 & 25 \\ & x_1 \cdot x_2 = 24 \rightarrow \begin{array}{cccccc} 1,24 & 2,12 & 3,8 & 4,6 & 5,4 & 6,2 \\ -1,-24 & -2,-12 & -3,-8 & \text{4,6} (4+6=10) & -5,-4 & -6,-2 \end{array} \end{bmatrix}$$

- je-li součin rov záporný
=> jedno je kladné, druhé záporné

$$c) x^2 - x - 6 = (x+2)(x-3)$$

$$\begin{bmatrix} x_1+x_2 = -1 & \\ & x_1 \cdot x_2 = -6 \rightarrow \begin{array}{l} 1,-6 \\ -1,6 \\ \hline -2,-3 \end{array} \end{bmatrix}$$

$$d) x^2 - 2x - 3 = (x-3)(x+1)$$

$$\begin{bmatrix} x_1+x_2 = -2 & \\ & x_1 \cdot x_2 = -3 \rightarrow \begin{array}{l} 1,-3 \\ -1,3 \\ \hline -2,-1 \end{array} \end{bmatrix}$$

$$e) x^2 - 2x + 6 \quad \text{NEZDE ROZLOŽIT TAKTO}$$

$$\begin{array}{r} x_1+x_2 = -2 \\ x_1 \cdot x_2 = 6 \end{array} \quad \begin{array}{r} 1,6 \\ -1,-6 \\ \hline -5,-3 \end{array}$$

DALŠÍ PŘÍKLDY - NÁVN. LIST

ROZKLAD MNOHOČLENŮ - PROCVÍČENÍ

① Rozložit

$$3x^2 - 15xy = 3x(x - 5y)$$

$$2xy - 6x + 4x^2 = 2x(y - 3 + 2x) = 2x(x + y - 3)$$

$$x^2b + xb^2 = xb(x + b)$$

$$8bcd + 4byd = 4bd(2c + y)$$

$$3abm - 6amn = 3am(b - 2n)$$

② Rozložit

$$3(4-pv) - 2qv(4-pv) = (4-pv)(3-2q)$$

$$3d(c+ab) - 4(c+ab) = (c+ab)(3d-4)$$

$$a(c-d) - b(c-d) = (c-d)(a-b)$$

$$a^2(2a-3) + (2a-3) = (2a-3)(a^2+1)$$

$$(3-u) - uv(3-u) = (3-u)(1-uv)$$

③ Vyčlenit -1

$$x^2 - 2x - 1 = -1(x^2 + 2x + 1)$$

$$-u + 5v + 2w = -(u - 5v - 2w)$$

$$-3 + 2x - 4y = -(3 - 2x + 4y)$$

$$2(a-b) = -2(-a+b) = -2(b-a)$$

$$-x(y^2 - x^2) = +x(y^2 + x^2) = x(x^2 - y^2)$$

④ Z jednoho dvojčlena vyčlenit (-1) a rozložit potom v součin

$$9(1-x^2) + 2(x^2 - 1) = 9(1-x^2) - 2(1-x^2) = 7(1-x^2) \quad [= 7(1-x)(1+x)]$$

$$2w(v-w) + 11(w-v) = 2w(v-w) - 11(v-w) = -9(v-w) = \frac{9(-1)(v-w)}{9(v-w)} =$$

$$x^2(2a-5b) - 3b(5b-2ax) = x^2(2a-5b) + 3b(2a-5b) = (2a-5b)(x^2 + 3b)$$

$$k(v+2) - u(-v-2) = k(v+2) + u(v+2) = (v+2)(k+u)$$

⑤ Rozložit v součin (postupní vyřídkání)

$$\underline{3x^2} - 3xy + 2y^2 - 2xy = 3x(x-y) + 2y(y-x) = 3x(x-y) - 2y(x-y) \\ = \underline{(x-y)(3x-2y)}$$

$$\underline{2x^3 - x^2 + 2x - 1} = \underline{x^2(2x-1)} + \underline{(2x-1)} = \underline{(2x-1)(x^2+1)}$$

$$3x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2 = x^2(3x^2 - 2) + 13x^2 - 2 = (3x^2 - 2)(x^2 + 1) = \\ = \underline{(3x^2 - 2)(x+1)(x^2 - x + 1)}$$

$$x^3 - x^2 - x + 1 = x^2(x-1) - 1(x-1) = (x-1)(x^2 - 1) = \underline{(x-1)(x-1)(x+1)} \\ [= \underline{(x-1)^2(x+1)}]$$

$$(x-y)^2 - 3xy + 3yx = (x-y)^2 - 3xy(x-y) = [(x-y)(x-y) - 3xy(x-y)] \\ = (x-y)[(x-y) - 3x] = \underline{(x-y)(x-y - 3x)}$$

$$\textcircled{6} \text{ Rozložit } a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

$$x^2 - 9 = (x-3)(x+3)$$

$$cd^2 - 4 = (cd-2)(cd+2)$$

$$9p^2 - 49 = (3p-7)(3p+7)$$

$$16m^2 - 64n^2 = (4m-8n)(4m+8n) = 4(m-2n)4(m+2n) = 16(m-2n)(m+2n)$$

$$\cancel{m^2 - n^2} = 16(m^2 - 4n^2) = 16(m-2n)(m+2n)$$

$$25a^2 - 16b^2 = (5a-4b)(5a+4b)$$

$$\begin{aligned} a^2 - b^2 &= (a-b)(a+b) \\ m^2 - (a+b)^2 &= [m - (a+b)][m + (a+b)] = \\ &= (m-a-b)(m+a+b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3a-1)^2 - (2b-5)^2 &= [(3a-1)-(2b-5)][(3a-1)+(2b-5)] \\ &= (3a-1-2b+5)(3a-1+2b-5) = \\ &= (3a-2b+4)(3a+2b-6) \end{aligned}$$

$$\textcircled{7} \text{ Rozložit } a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$$

$$x^2 + 2xy + y^2 = (x+y)^2$$

$$c^2 + 2cd + d^2 = (c+d)^2$$

$$a^2 + 10a + 25 = (a+5)^2$$

$$n^2 + 6nb + 9b^2 = (n+3b)^2$$

$$x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2$$

$$4p^2 - 4pq + q^2 = (2p-q)^2$$

$$16a^2 - 8a + 1 = (4a-1)^2$$

$$k^2 - 20k + 100 = (k-10)^2$$

$$\textcircled{8} \text{ Rozložit } a^2 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$$

$$x^3 + 8 = (x+2)(x^2 - 2x + 4)$$

$$x^3 - 125 = (x-5)(x^2 + 5x + 25)$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$y^3 + 27 = (y+3)(y^2 - 3y + 9)$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{NEPLÉT?} \\ (x+y)^2 = (x+y)(x+y) \\ (x+y)(x-y) = x^2 - y^2 \end{array} \right]$$

\textcircled{10} Rozložit kvadratický trojčlen (Metody moci) | Pro kontrolu si napíšte, vymalojte

$$x^2 - 5x + 6 = (x-3)(x-2)$$

$$x^2 + 7x + 12 = (x+4)(x+3)$$

$$x^2 - x - 6 = (x-3)(x+2)$$

$$x^2 - 7x + 12 = (x-4)(x-3)$$

$$x^2 + 5x + 6 = (x+3)(x+2)$$

$$x^2 - x - 12 = (x-4)(x+3)$$

$$x^2 + x - 6 = (x+3)(x-2)$$

$$x^2 + x - 12 = (x+4)(x-3)$$

$$x^2 - 3x - 10 = (x-5)(x+2)$$

$$x^2 + 15x + 50 = (x+5)(x+10)$$

$$x^2 + 8x + 12 = (x+2)(x+6)$$

$$x^2 + 10x + 24 = (x+4)(x+6)$$

$$x^2 - 4x - 12 = (x-6)(x+2)$$

$$x^2 + 6x - 27 = (x+9)(x-3)$$

$$x^2 + 4x - 12 = (x+6)(x-2)$$

$$x^2 + 4x + 3 = (x+1)(x+3)$$

\textcircled{11} Rozložit

$$x^4 - y^4 = (x^2)^2 - (y^2)^2 = (x^2 - y^2)(x^2 + y^2) = (x-y)(x+y)(x^2 + y^2)$$

$$x^6 - y^6 = (x^3)^2 - (y^3)^2 = (x^3 - y^3)(x^3 + y^3) = (x-y)(x^2 + xy + y^2)(x^3 + y^3)$$

$$(x-y)^2 - (x+y)^2 = [(x-y) - (x+y)][(x-y) + (x+y)] =$$

$$= (x-y-x-y)(x-y+x+y) = -2y(2x) = -4xy$$